Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Kettinglijn

1 maximumscore 4

- $f'(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}$ — 1
- $f'(x) = 0$ geeft $\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$ — 1
- Hieruit volgt $e^x = 4$ — 1
- Dus $x = \ln(4)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

2 maximumscore 6

- De y-coördinaat van T is $3\frac{1}{2}$ (of 3,5) — 1
- De formule voor de parabool is van de vorm $y = a(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}$
  (of $y = a(x - 1,4)^2 + 3,5$) — 1
- De y-coördinaat van A is 4 — 1
- Invullen van $(0, 4)$ in $y = a(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}$ (of $y = a(x - 1,4)^2 + 3,5$)
  geeft $a = \dfrac{1}{2\ln^2(4)}$ (of $a \approx 0,255$) — 1
- Beschrijven hoe de vergelijking
  $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{2\ln^2(4)}(x - \ln(4))^2 + 3\frac{1}{2}\right) = 1$
  (of $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{-\frac{1}{2}x} + 1\frac{1}{2} - \left(0,255(x - 1,4)^2 + 3,5\right) = 1$) met de GR kan worden
  opgelost — 1
- Het antwoord: $x \approx 5,1$ (of $x \approx 5,0$) — 1

Automotor

3 maximumscore 5

- $AB = 5$ — 1
- $AE = \cos(\alpha)$ — 1
- $CE = \sin(\alpha)$, dus (met de stelling van Pythagoras in driehoek *ECD*) $ED = \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$ — 2
- $s = AB - AE - ED = 5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)}$ — 1

4 maximumscore 3

- $|s - z| = \left|5 - \cos(\alpha) - \sqrt{16 - \sin^2(\alpha)} - (1 - \cos(\alpha) + \frac{1}{8}\sin^2(\alpha))\right|$ — 1
- Beschrijven hoe het maximum van $|s - z|$ met de GR kan worden berekend — 1
- Het maximale verschil is 0,002 — 1

Opmerking
Als zonder expliciet gebruik van de notatie van de absolute waarde het goede antwoord gevonden wordt, hiervoor geen scorepunten in mindering brengen.

5 maximumscore 4

- $z'(\alpha) = \sin(\alpha) + \frac{1}{4}\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 2
- Beschrijven hoe het maximum van $z'(\alpha)$ gevonden kan worden (of een aanpak waarbij $z''(\alpha) = 0$ opgelost wordt) — 1
- Het gevraagde antwoord is 1,03 — 1

Een driehoek draaiend over een cirkel

6 maximumscore 7

- $y = ax$ invullen in $(x-1)^2 + y^2 = 1$ geeft $(x-1)^2 + a^2x^2 = 1$ 1
- Herleiden tot $(a^2+1)x^2 - 2x = 0$ 1
- (Dit geeft $x = 0$ of $x = \dfrac{2}{a^2+1}$ dus geldt) $x_S = \dfrac{2}{a^2+1}$ 1
- $y_S = \dfrac{2a}{a^2+1}$ 1
- $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SP}$ 1
- $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} \frac{2a}{a^2+1} \\ -\frac{2}{a^2+1} \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2+1} \\ \frac{2a}{a^2+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2a}{a^2+1} \\ -\frac{2}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a+2}{a^2+1} \\ \frac{2a-2}{a^2+1} \end{pmatrix}$ (en dus $x_P = \dfrac{2a+2}{a^2+1}$ en $y_P = \dfrac{2a-2}{a^2+1}$) 1

Vraag	Antwoord	Scores

7 maximumscore 5

- De cirkel snijdt de x-as voor $a=1$ in $P(2,0)$ en de y-as voor $a=-1$ in $P(0,-2)$ — 1
- De middelloodlijnen van OP zijn in deze gevallen de lijnen met vergelijking $x=1$ en $y=-1$ — 1
- Het middelpunt van de cirkel is (het snijpunt van de middelloodlijnen, dus) $(1,-1)$ — 1
- Dit punt heeft afstand $\sqrt{2}$ tot $O(0,0)$ (of P) (dus de straal is $\sqrt{2}$) — 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ — 1

of

- De cirkel snijdt de x-as voor $a=1$ in $P(2,0)$ en de y-as voor $a=-1$ in $P(0,-2)$ — 1
- De cirkel gaat door O dus is (wegens Thales) het lijnstuk tussen $(2,0)$ en $(0,-2)$ de middellijn van de cirkel — 1
- Het punt $(1,-1)$ ligt midden tussen deze punten en is het middelpunt van de cirkel — 1
- Invullen van de coördinaten van $O(0,0)$ (of P) in $(x-1)^2+(y+1)^2$ — 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ — 1

of

- $O(0,0)$ ligt op de cirkel; bijvoorbeeld invullen van $a=1$ respectievelijk $a=-1$ geeft dat $(2,0)$ en $(0,-2)$ op de cirkel liggen — 1
- Voor de coördinaten van het middelpunt M geldt dus $x_M^2+y_M^2=r^2$, $(2-x_M)^2+y_M^2=r^2$ en $x_M^2+(y_M+2)^2=r^2$ (waarbij r de straal van de cirkel is) — 1
- Combinatie van $x_M^2+y_M^2=r^2$ en $(2-x_M)^2+y_M^2=r^2$ geeft $x_M=1$ — 1
- Combinatie van $x_M^2+y_M^2=r^2$ en $x_M^2+(y_M+2)^2=r^2$ geeft $y_M=-1$ — 1
- Invullen van bijvoorbeeld $O(0,0)$ in de vergelijking $(x-1)^2+(y+1)^2=r^2$ geeft $r^2=2$, dus een vergelijking van de cirkel is $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ — 1

8 **maximumscore 5**

- $x_P' = \dfrac{2(a^2+1)-(2a+2)\cdot 2a}{(a^2+1)^2}$ 2
- $x_P' = 0$ geeft $-2a^2-4a+2=0$ 1
- Een berekening waaruit volgt dat $a=-1\pm\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een toelichting waaruit blijkt dat x_P maximaal is als $a=-1+\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Als x_P maximaal is, dan ligt P op dezelfde hoogte als het middelpunt van de cirkel 1
- Er geldt dus $\dfrac{2a-2}{a^2+1}=-1$ 1
- Hieruit volgt $a^2+2a-1=0$ 1
- Een berekening waaruit volgt dat $a=-1\pm\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een toelichting waaruit blijkt dat x_P maximaal is als $a=-1+\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Als x_P maximaal is, dan ligt P rechts van het middelpunt van de cirkel op dezelfde hoogte als het middelpunt van de cirkel 1
- Er geldt dus $\dfrac{2a+2}{a^2+1}=1+\sqrt{2}$ 1
- Herleiden geeft $(1+\sqrt{2})a^2-2a+\sqrt{2}-1=0$ 1
- Een berekening waaruit volgt dat $a=-1+\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2

of

- Als x_P maximaal is, dan ligt P rechts van het middelpunt van de cirkel op dezelfde hoogte als het middelpunt van de cirkel 1
- Er geldt (omdat $\angle OSP=90°$) dus $\begin{pmatrix} \frac{2}{a^2+1} \\ \frac{2a}{a^2+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}-\frac{2}{a^2+1} \\ -1-\frac{2a}{a^2+1} \end{pmatrix} = 0$ 1
- $\dfrac{2}{a^2+1}\cdot\left(1+\sqrt{2}-\dfrac{2}{a^2+1}\right)+\dfrac{2a}{a^2+1}\cdot\left(-1-\dfrac{2a}{a^2+1}\right)=0$ 1
- Een berekening waaruit volgt dat $a=-1+\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2

of

Vraag	Antwoord	Scores

- Als x_P maximaal is, dan ligt *P* rechts van het middelpunt van de cirkel op dezelfde hoogte als het middelpunt van de cirkel 1
- Een vergelijking van de lijn door *S* loodrecht op lijn *OS* is
  $y-\frac{2a}{a^2+1}=-\frac{1}{a}\left(x-\frac{2}{a^2+1}\right)$ 1
- Er geldt dus $-1-\frac{2a}{a^2+1}=-\frac{1}{a}\left(1+\sqrt{2}-\frac{2}{a^2+1}\right)$ 1
- Een berekening waaruit volgt dat $a=-1+\sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2

Snelheid op een baan

9 maximumscore 8

- In B geldt $\sin(2t)+\sin(t)=0$ 1
- Dit geeft ($2\sin(t)\cos(t)+\sin(t)=0$ en dan volgt) $\sin(t)(2\cos(t)+1)=0$ 1
- (In B geldt) $\cos(t)=-\frac{1}{2}$ (en in A en C geldt $\sin(t)=0$) 1
- Dus in B geldt $t=\frac{2}{3}\pi$ 1
- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\cos(2t)+\cos(t)$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\sin(t)$ 2
- In B is de snelheid
  $\sqrt{(2\cos(2\cdot\frac{2}{3}\pi)+\cos(\frac{2}{3}\pi))^2+(-\sin(\frac{2}{3}\pi))^2}$ $(=\sqrt{(-1-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2})=\sqrt{3}$ 2

of

- In B geldt $\sin(2t)+\sin(t)=0$ 1
- Dit geeft $\sin(2t)(=-\sin(t))=\sin(-t)$, dus $2t=-t+k\cdot 2\pi$ of
  $2t=\pi-(-t)+k\cdot 2\pi$ (k geheel) 1
- $t=k\cdot\frac{2}{3}\pi$ of $t=\pi+k\cdot 2\pi$ (k geheel) 1
- Dus in B geldt $t=\frac{2}{3}\pi$ 1
- $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\cos(2t)+\cos(t)$ en $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\sin(t)$ 2
- In B is de snelheid
  $\sqrt{(2\cos(2\cdot\frac{2}{3}\pi)+\cos(\frac{2}{3}\pi))^2+(-\sin(\frac{2}{3}\pi))^2}$ $(=\sqrt{(-1-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2}\sqrt{3})^2})=\sqrt{3}$ 2

Metselboog

10 maximumscore 5

- Het gebruiken van of verwijzen naar een rechthoekige driehoek waarvan het middelpunt van de cirkel een hoekpunt is en met een rechthoekszijde met lengte 45 1
- De andere rechthoekszijde heeft lengte $r-18$, waarbij r de te berekenen straal is 1
- Er geldt (volgens de stelling van Pythagoras) $r^2=(r-18)^2+45^2$ 1
- Herleiden tot $r^2=r^2-36r+2349$ 1
- $r=\frac{2349}{36}$ dus het antwoord: 65 (cm) 1

of

- Het gebruiken van of verwijzen naar een rechthoekige driehoek waarvan het middelpunt van de cirkel een hoekpunt is en met een rechthoekszijde met lengte 45 1
- De andere rechthoekszijde heeft lengte $r-18$, waarbij r de te berekenen straal is 1
- In deze driehoek geldt $\cos(\phi)=\dfrac{r-18}{r}$, waarbij ϕ de hoek bij het middelpunt is; in de gelijkbenige driehoek met tophoek ϕ waarvan de benen stralen van de cirkel zijn, geeft de cosinusregel $18^2+45^2=r^2+r^2-2r^2\cos(\phi)$ 1
- Substitutie van $\cos(\phi)=\dfrac{r-18}{r}$ geeft $2349=2r^2-2r^2+36r$ 1
- $r=\frac{2349}{36}$ dus het antwoord: 65 (cm) 1

Vierkant bij een grafiek

11 maximumscore 5

- De inhoud kan worden berekend met behulp van de integraal
  $\pi \cdot \int \left(16^2 - \left(\frac{16}{\sqrt{x}} \right)^2 \right) \mathrm{d}x$ — 2
- De grenzen zijn 1 en 17 — 1
- Een primitieve van $256 - \frac{256}{x}$ is (voor $x > 0$) $256x - 256\ln(x)$ — 1
- De gevraagde inhoud is $\pi\left(4096 - 256\ln(17)\right)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

- De inhoud kan worden berekend met behulp van de integraal
  $\pi \cdot 16^2 \cdot 16 - \pi \cdot \int \left(\frac{16}{\sqrt{x}} \right)^2 \mathrm{d}x$ — 2
- De grenzen zijn 1 en 17 — 1
- Een primitieve van $\frac{256}{x}$ is (voor $x > 0$) $256\ln(x)$ — 1
- De gevraagde inhoud is $\pi\left(4096 - 256\ln(17)\right)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

Opmerking

Als de integraal $\pi \cdot \int \left(16 - \left(\frac{16}{\sqrt{x}} \right) \right)^2 \mathrm{d}x$ *is gebruikt, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.*

12 maximumscore 5

- $AB = AD = \frac{16}{\sqrt{a}}$, dus $b = a + \frac{16}{\sqrt{a}}$ $\left(= a + 16a^{-\frac{1}{2}}\right)$ — 1
- $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}a} = 1 - 8a^{-\frac{3}{2}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1
- b is minimaal als $1 - 8a^{-\frac{3}{2}} = 0$ — 1
- Dit geeft $a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{8}$ — 1
- Dus $a = 4$ en $b = 4 + \frac{16}{2} = 12$ — 1

Limietpunt

13 maximumscore 3

- (Voor een punt (x, y) op de grafiek van de inverse van f_c ligt punt (y, x) op de grafiek van f_c dus er geldt) $x = \frac{1}{c(y-1)} + 1$ 1
- $c(y-1) = \frac{1}{x-1}$ 1
- $y = \frac{1}{c(x-1)} + 1$ (dus $y = f_c(x)$, dus f_c is de inverse van zichzelf) 1

of

- f_c is samengesteld uit de opeenvolgende bewerkingen ‘min 1’, ‘maal c’, ‘omgekeerde’ en ‘plus 1’, dus de inverse van f_c is samengesteld uit de opeenvolgende bewerkingen ‘min 1’, ‘omgekeerde’, ‘gedeeld door c’ en ‘plus 1’ 1
- Dat geeft voor de inverse $y = \frac{\frac{1}{x-1}}{c} + 1$ 1
- Dus $y = \frac{1}{c(x-1)} + 1$ (dus f_c is de inverse van zichzelf) 1

of

- $f_c(f_c(x)) = \frac{1}{c\left(\frac{1}{c(x-1)} + 1 - 1\right)} + 1$ 1
- $f_c(f_c(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x-1}} + 1$ 1
- $f_c(f_c(x)) = x$ (dus f_c is de inverse van zichzelf) 1

of

- Spiegeling in $y = x$ van $y = \frac{1}{cx}$ geeft $x = \frac{1}{cy}$, ofwel $y = \frac{1}{cx}$, dus $y = \frac{1}{cx}$ is spiegelsymmetrisch in $y = x$ 1
- De grafiek van f_c is het beeld van de grafiek van $y = \frac{1}{cx}$ door een verschuiving langs de lijn $y = x$ (namelijk een horizontale verschuiving van 1 naar rechts en een verticale verschuiving van 1 omhoog) 1
- Door deze verschuiving blijft spiegelsymmetrie in $y = x$ behouden (dus f_c is de inverse van zichzelf) 1

14 maximumscore 3

- $f_c(1+p)=\dfrac{1}{c(1+p-1)}+1$ en $f_c(1-p)=\dfrac{1}{c(1-p-1)}+1$ — 1
- $f_c(1+p)+f_c(1-p)=\dfrac{1}{cp}-\dfrac{1}{cp}+2=2$ — 1
- Dus $\dfrac{f_c(1+p)+f_c(1-p)}{2}=1$ (dus de grafiek van f_c is puntsymmetrisch ten opzichte van S) — 1

15 maximumscore 5

- De x-coördinaat van A is een oplossing van de vergelijking $x=\dfrac{1}{c(x-1)}+1$ — 1
- Herleiden tot $(x-1)^2=\dfrac{1}{c}$ — 1
- $x_A=1-\sqrt{\frac{1}{c}}$ ($x=1+\sqrt{\frac{1}{c}}$ hoort bij het andere snijpunt) — 1
- Als c onbegrensd toeneemt, nadert $1-\sqrt{\frac{1}{c}}$ naar 1 — 1
- A ligt op k, dus ook $y_A=1-\sqrt{\frac{1}{c}}$, dus de y-coördinaat nadert ook naar 1, dus het limietpunt is $(1,1)$ (dus S is het limietpunt) — 1

Vier vierkanten

16 maximumscore 6

- De oppervlakte van het lichtgrijze deel is p^2+q^2 en van het donkergrijze deel is $\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}s^2$ — 1
- De cosinusregel geeft $r^2=p^2+q^2-2pq\cos(\alpha)$ — 1
- De cosinusregel geeft $s^2=p^2+q^2-2pq\cos(\beta)$ — 1
- $\beta=180°-\alpha$ — 1
- $\cos(180°-\alpha)=-\cos(\alpha)$ geeft $s^2=p^2+q^2+2pq\cos(\alpha)$ — 1
- $\frac{1}{2}r^2+\frac{1}{2}s^2=\frac{1}{2}(p^2+q^2-2pq\cos(\alpha))+\frac{1}{2}(p^2+q^2+2pq\cos(\alpha))=p^2+q^2$ (dus de oppervlaktes zijn gelijk) — 1